θ -параметрическая форма [2 ,с.41], вдоль которого она принадлежит двум смежным коллинеациям. Из этого определения следует, что координаты X^J, x^k фокальной точки удовлетворяют системе уравнений

$$f^i=0,\quad f^i+df^i=0. \qquad (4.2)$$

Направление $\Omega^x=t^x\theta$ называется фокальным направлением семейства Π_n. Используя (1.3),(1.6), находим

$$df^i=\mu^i_k f^k+f^i_x\Omega^x, \qquad (4.3)$$

где

$$\mu^i_k = x^i\omega^0_k - \omega^i_k + \delta^i_k(\omega^0_0 + X^x\Omega^0_x), \qquad (4.4)$$

$$f^i_x = P_{Jx}x^iX^J + (M^i_{Jx} - \lambda^i_x P_J)X^J - x^iP_x - \tilde{\lambda}^i_x. \qquad (4.5)$$

Следовательно, фокальные точки и фокальные семейства определяются системой уравнений:

$$f^i=0,\quad f^i_x\Omega^x=0. \qquad (4.6)$$

Исключая из этих уравнений базисные формы Ω^J, получим систему уравнений для определения фокальных точек коллинеации $\pi\in\Pi_n$:

$$f^i=0,\quad \det(f^i_x)=0. \qquad (4.7)$$

Эта система содержит $n+1$ уравнение на $2n$ координат X^J, x^k. Определяя из уравнений $f^i=0$ координаты x^k и подставляя их значения в оставшиеся уравнения системы (4.7), убеждаемся, что проекция множества фокальных точек на пространство $\mathcal{P}_n$ образует в нем алгебраическую гиперповерхность S порядка 2^n. Аналогично, исключая X^J, получим в пространстве P_n алгебраическую гиперповерхность σ порядка 2^n.

Назовем S и σ фокальными гиперповерхностями коллинеации $\pi\in\Pi_n$. Из (4.5),(4.7) непосредственно вытекает

П р е д л о ж е н и е 5. Фокальная гиперповерхность S коллинеации $\pi\in\Pi_n$ содержит точку P^0 тогда и только тогда, когда $r=\operatorname{rang}(\tilde{\lambda}^i_x)<n$, т.е. когда инвариантное подпространство (3.3) не вырождается в точку P^0.

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий//Тр.моск.матем.о-ва/ГИТЛ.М.,1953.Т.2.С.275-382.

2. Б о л о д у р и н В.С. О точечных соответствиях между гиперповерхностями проективных пространств//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1969.Т.2.С.55-79.

3. М а л а х о в с к и й Н.В. О двумерных многообразиях в прямом произведении проективных пространств//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр. ун-т.Калининград,1988.Вып.19.С.55-57.

4. Ч е х Э. Проективно-дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами.I//Чехосл.матем.ж.1952.V.2.№1. P.91-107.

5. Л а п т е в Г.Ф. Распределение касательных элементов// Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1971.Т.3.С.29-48.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СЕТЕЙ НА ПАРЕ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

А.Ф.М а с а г у т о в а
(МГПИ им.В.И.Ленина)

В работе рассматриваются некоторые вопросы геометрии дифференцируемого отображения области Ω на область $\bar{\Omega}$ в евклидовом пространстве E_n с использованием тензора h^a_{bc}, свойства которого в значительной мере отражают геометрические свойства пары подмногообразий.

1. В n-мерном евклидовом пространстве E_n рассмотрим дифференцируемое отображение f некоторой области Ω на область $\bar{\Omega}$. Пусть произвольной точке $x\in\Omega$ соответствует при отображении f точка $y\in\bar{\Omega}$. Отнесем область Ω к подвижному реперу $R^x=\{x,\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ так, что $\vec{e}_n \parallel \vec{xy}$, а область $\bar{\Omega}$ – к подвижному реперу $R^y=\{y,\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n\}$, где

$$R^y=f_{*x}(R^x), \qquad (1)$$

f_{*x} -индуцированное отображение.

Деривационные формулы реперов R^x и R^y имеют вид:

$$\begin{cases} d\vec{x}=\omega^a\vec{e}_a, & d\vec{e}_a=\omega^b_a\vec{e}_b,\\ d\vec{y}=\bar{\omega}^b\vec{a}_b, & d\vec{a}_a=\bar{\omega}^b_a\vec{a}_b \end{cases} \qquad (2)$$

(здесь и далее $a,b,c,\ldots=\overline{1,n}$; $i,j,k,\ldots=\overline{1,n-1}$).

Все дифференциальные формы ω удовлетворяют известным уравнениям структуры евклидова пространства E_n.

Отображение f определяют следующие уравнения:

$$\bar{\omega}^a = \omega^a. \tag{3}$$

Продолжая уравнения (3), получим

$$\bar{\omega}^c_b - \omega^c_b = h^c_{bd}\,\omega^d, \tag{4}$$

где h^c_{bd} -тензор, симметричный по нижним индексам.

Рассмотрим гиперплоскость $\pi(x) \ni x$, перпендикулярную прямой xy, заданную уравнением $\alpha_a x^a = 0$, где $\alpha_i = 0$, $\alpha_n = 1$, т.е. $x^n = 0$. Здесь α_a -ковектор, определяющий гиперплоскость $\pi(x)$. В области Ω мы получим распределение π гиперплоскостей $\pi(x)$. Свернем тензор h^a_{bc} с ковектором α_a: $\alpha_a h^a_{bc} = h_{bc}$. В каждой точке $x \in \Omega$ имеем конус, определяемый уравнением $h_{bc}x^b x^c = 0$, пересечение которого с гиперплоскостью $\pi(x)$ есть конус K:

$$h_{ij}\,x^i x^j = 0. \tag{5}$$

Направим векторы $\vec{e}_i$ по главным направлениям конуса K. Тогда репер R^x станет ортогональным и уравнение конуса K примет вид: $\sum h_{ii}\,(x^i)^2 = 0$, при этом $h_{ij} = 0 \ (i \neq j)$.

2.Линию ℓ в области Ω назовем характеристической линией отображения f, если в каждой точке $x \in \ell$ направление ее касательной является инвариантным в отображении f, определяемом тензором h^a_{bc} ($H: T_x \times T_x \to T_x$, где T_x -касательное пространство в точке x), и если $\vec{\xi} = \xi^a \vec{e}_a$, $\vec{\eta} = \eta^b \vec{e}_b$, то $H(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = h^a_{bc}\,\xi^b \eta^c \vec{e}_a$. Следующие уравнения являются аналитическими условиями характеристичности ℓ: $h^a_{bc}\,\ell^b \ell^c = \lambda \ell^a$, где ℓ^a -координаты касательного вектора $\vec{\ell}$ к линии ℓ. Отсюда следует

Т е о р е м а I. Главные направления конуса K и направление, определяемое вектором $\vec{e}_n$, будут характеристическими направлениями отображения f тогда и только тогда, когда выполняются соотношения:

$$h_{ij} = 0 \ (i \neq j),\ h^i_{aa} = 0 \ (i \neq a),\ h^a_{aa} \neq 0. \tag{6}$$

3.Дифференциальные формы ω^n_i являются главными формами (зависят только от ω^a). Следовательно,

$$\omega^n_i = \Lambda_{ia}\,\omega^a = \Lambda_{ij}\,\omega^j + \Lambda_{in}\,\omega^n. \tag{7}$$

Соответственно $\bar{\omega}^n_i = \bar{\Lambda}_{ia}\,\omega^a$. Продолжим уравнения (7):

$$d\Lambda_{ia} - \Lambda_{ja}\,\omega^j_i - \Lambda_{ib}\,\omega^b_a = \Lambda_{iab}\,\omega^b. \tag{8}$$

Фиксируем точку x ($\omega^b = 0$). Из системы (8) получим: $\delta\Lambda_{ia} - \Lambda_{ja}\pi^j_i - \Lambda_{ib}\pi^b_a = 0$, где δ -символ дифференцирования по вторичным параметрам и $\pi^b_a = \omega^b_a|_{\omega^c=0}$. Можно показать, что полученная система вполне интегрируема. По теореме Лаптева система величин $\{\Lambda_{ij}, \Lambda_{in}\}$ образует геометрический объект. Аналогично можно доказать, что системы величин $\{\Lambda_{ij}\}, \{\Lambda_{in}\}$ образуют геометрические объекты (тензоры). Распределение π вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ji}$.

4. Пусть ℓ -произвольная гладкая линия в области Ω. Ее дифференциальные уравнения: $\omega^a = \ell^a\theta$, где θ -параметрическая форма и $\mathcal{D}\theta = \theta \wedge \theta_1$. Если $\ell \subset \pi(x)$, то $\omega^n = 0$, $\omega^i = \ell^i\theta$.

Асимптотической линией распределения π называется такая линия γ, принадлежащая этому распределению, что в каждой точке $x \in \gamma$ соприкасающаяся плоскость $(x, d\vec{x}, d^2\vec{x}) \subset \pi(x)$. Находим, что $d^2\vec{x} \in \pi(x)$ тогда и только тогда, когда $\Lambda_{ij}\,\ell^i\ell^j = 0$.

Т е о р е м а 2. Линия ω^i -асимптотическая на распределении π тогда и только тогда, когда $h_{ii} = \bar{\Lambda}_{ii}$. В самом деле, из выше сделанных выводов и формул (4),(7) следует: $\bar{\omega}^n_i - \omega^n_i = h_{ii}\omega^i$.

С другой стороны $\bar{\omega}^n_i - \omega^n_i = \bar{\Lambda}_{ii}\,\omega^i$. Отсюда вытекает утверждение теоремы.

5.Пусть $\|\varphi^a_b\|$ -матрица перехода от базиса $\{\vec{e}_a\}$ к $\{\vec{a}_b\}$, т.е.

$$\vec{a}_b = \varphi^a_b\,\vec{e}_a \quad (\det\|\varphi^a_b\| \neq 0). \tag{9}$$

Отсюда $d\vec{a}_b = d\varphi^a_b\vec{e}_a + \varphi^a_b\,d\vec{e}_a$. Используя формулы (2),(9), находим:

$$d\varphi^a_b + \varphi^d_b\,\omega^a_d - \varphi^a_d\,\bar{\omega}^d_b = 0 \tag{10}$$

или $d\varphi^a_b + \varphi^d_b\,\omega^a_d - \varphi^a_d\,\omega^d_b = \varphi^a_{bc}\,\omega^c_n$, где $\varphi^a_{bc} = \varphi^a_d\,h^d_{bc}$.

Система из n линейно независимых полей направлений $\vec{e}_a$ определяет в области Ω ортогональную сеть Σ_n, которой соответствует сеть $\bar{\Sigma}_n$. Рассмотрим, когда сеть Σ_n будет основанием отображения f, т.е. в отображении f перейдет в ортогональную сеть. Тогда

$$\vec{a}_b \cdot \vec{a}_c = k_{bc}\cdot\delta_{bc}, \tag{II}$$

где $k_{bb} = \vec{a}^2_b$, $k_{bc} = 0 \ (b \neq c)$. Продифференцировав уравнения (II), получим $\bar{\omega}^c_b\,\vec{a}^2_c + \bar{\omega}^b_c\,\vec{a}^2_b = 0$ ($b \neq c$, нет суммирования), $\bar{\omega}^b_b = d\ln|\vec{a}_b|$.

Применив формулу (9), придем к следующему утверждению:

Т е о р е м а 3. Для того чтобы сеть Σ_n была основанием отображения f, необходимо и достаточно, чтобы для всех $b \neq c$ выполнялось равенство $\sum_{a=1}^{n} \varphi_b^a \varphi_c^a = 0$.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. Материалы по геометрии /МГПИ им.В.И. Ленина.М., 1978. Вып.1.

2. Б а з ы л е в В.Т. Сети на многообразиях//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М., 1974. Т.6. С.189-205.

УДК 514.75

О ВТОРОЙ ПОЛЯРЕ Р-ПОВЕРХНОСТИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Н.И.М о с к а л е н к о

(МГПИ им.В.И.Ленина)

В статье рассматривается вторая поляра точки $x \in V_p \subset E_n$ относительно присоединенной поверхности и ее некоторые связи с геометрией самой поверхности V_p. Обобщаются результаты исследований по геометрии поверхностей коразмерности два [3] и коразмерности три [4].

Рассмотрим гладкую р-мерную поверхность V_p $(p \geq 2)$ в евклидовом пространстве E_n. Отнесем поверхность к подвижному реперу

$$R = (x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha) \quad (i,j,k,t,\ell = \overline{1,p}; \ \alpha,\beta = \overline{p+1,n}),$$

где орты e_i принадлежат касательному пространству $T_x(V_p)$ к поверхности V_p в точке x, а векторы $\vec{e}_\alpha$ образуют ортонормированный базис нормальной плоскости $N_{n-p}(x)$ поверхности V_p. Деривационные формулы такого репера имеют вид

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i; \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^\alpha \vec{e}_\alpha; \quad d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^i \vec{e}_i + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta.$$

Продолжая систему $\omega^\alpha = 0$ дифференциальных уравнений нашей поверхности, получим равенства $\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j$, $b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha$, где b_{ij}^α -система $n-p$ вторых основных тензоров поверхности $V_p \subset E_n$. При замене базиса $(\vec{e}_\alpha)$ в плоскости $N_{n-p}(x)$ величины b_{ij}^α (i,j фиксированы) преобразуются как координаты вектора.

Имеем систему $\frac{1}{2}p(p+1)$ векторов $\vec{b}_{ij} = b_{ij}^\alpha \vec{e}_\alpha$. В дальнейшем будем предполагать, что число независимых векторов этой системы равно $n-p$, т.е. размерность главной нормали р-поверхности максимальна.

Вектор $\vec{M} = \frac{1}{p}\gamma^{ij} b_{ij}^\alpha \vec{e}_\alpha$ -есть вектор средней кривизны поверхности V_p в точке x, здесь γ^{ij} -контравариантные компоненты метрического тензора $\gamma_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$ поверхности $V_p \subset E_n$. Будем рассматривать неминимальную поверхность $(\vec{M} \neq \vec{0})$ $V_p \subset E_n$. В этом случае к точке $x \in V_p$ инвариантным образом присоединена прямая $(x, \vec{M})$- средняя нормаль поверхности.

Уравнение

$$\det \| \sum_\alpha b_{ij}^\alpha y^\alpha - \gamma_{ij} \| = 0$$

определяет в плоскости $N_{n-p}(x)$ алгебраическую гиперповерхность порядка p (присоединенную поверхность), не проходящую через точку $x \in V_p$. Так как размерность главной нормали максимальна, то эта поверхность есть фокусная поверхность к поверхности V_p в данной точке x [1]. Если записать это уравнение в однородных координатах

$$F(y^{p+1}, y^{p+2}, \ldots, y^n, y^0) = 0,$$

то в плоскости $N_{n-p}(x)$ уравнение второй поляры точки $x \in V_p$ относительно фокусной поверхности (в дальнейшем для краткости будем опускать слова "относительно фокусной поверхности") имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^\sigma \partial y^\varrho}\right)_x y^\sigma y^\varrho = 0 \qquad (\sigma, \varrho = p+1, p+2, \ldots, n, 0),$$

где частные производные вычисляются в точке x (0,0,0,...,0,1).

Пусть векторы $\vec{e}_i$ репера ортонормированы, тогда $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$. Запишем уравнение фокусной поверхности в виде

$$\det \| \sum_\alpha b_{ij}^\alpha y^\alpha - y^0 \delta_{ij} \| = 0.$$

Раскрывая этот определитель и располагая члены по степеням y^0, получим

$$(-1)^p (y^0)^p + (-1)^{p-1} \Delta_1 (y^0)^{p-1} + (-1)^{p-2} \Delta_2 (y^0)^{p-2} + \ldots + (-1)\Delta_{p-1} y^0 + \Delta_p = 0,$$

где $\Delta_p = \det \| \sum_\alpha b_{ij}^\alpha y^\alpha \|$, а коэффициент при $(y^0)^{p-k}$ равен сумме всех главных миноров k-го порядка последнего определителя. Вычисляя вторые частные производные от левой части последнего уравнения, получим следующее уравнение второй поляры (в ортонормированном репере):